

УДК 517.967.23

И.И. Иванов<sup>1</sup>, П.П. Петров<sup>2</sup>**ПОЛНОЕ НАЗВАНИЕ СТАТЬИ, КОТОРОЕ МОЖЕТ  
И НЕ ВПИСЫВАТЬСЯ В ОДНУ СТРОЧКУ\***

Пусть оставшиеся вершины, которые будем называть промежуточными вершинами, образуют множество  $B = \{p_i, i = n+1, \dots, \eta-m\}$ . Пусть каждой вершине  $p_i \in A$  поставлена в соответствие некоторая неотрицательная функция  $\phi_i(x) \geq 0, x \in X$ , где  $X$  — множество допустимых распределений ресурсов. Кроме того, известны неотрицательные функции  $\phi_j(x) \geq 0$ , задающие пропускные способности дуг сети в зависимости от выбранного распределения ресурсов.

*Ключевые слова:* шаблоны, образцы

**1. Введение.** Работа основана на полученных в [1] результатах и является дальнейшим развитием представленного там метода обобщенных потенциалов. Рассматривается задача синтеза сети для модели Гейла о спросе и предложении [2]. Пусть задан ориентированный граф с вершинами из множества  $P = \{p_i, i = 1, \dots, \eta\}$  и дугами  $j$  из множества  $\Gamma$ . Рассмотрим некоторую совокупность вершин  $A$  (подмножество множества  $P$ ), которые будем называть источниками (или пунктами производства), и некоторое множество вершин  $C = \{p_i, i = \eta - m + 1, \dots, \eta\}$ , которые назовем стоками (или пунктами потребления). Пусть оставшиеся вершины, которые будем называть промежуточными вершинами, образуют множество  $B = \{p_i, i = n+1, \dots, \eta-m\}$ . Пусть каждой вершине  $p_i \in A$  поставлена в соответствие некоторая неотрицательная функция  $\phi_i(x) \geq 0, x \in X$ , где  $X$  — множество допустимых распределений ресурсов. Кроме того, известны неотрицательные функции  $\phi_j(x) \geq 0$ , задающие пропускные способности дуг сети в зависимости от выбранного распределения ресурсов. Таким образом, ресурсы распределяются как между вершинами-источниками, определяя тем самым мощности источников, так и между дугами сети, определяя их пропускные способности. Для вершин-стоков известны величины потребностей в продукте —  $d_j$ . В дальнейшем для упрощения записей будем писать  $i \in A, i \in B, i \in C$  вместо  $p_i \in A, p_i \in B, p_i \in C$ .

**Теорема 1.** *Таким образом, ресурсы распределяются как между вершинами-источниками, определяя тем самым мощности источников, так и между дугами сети, определяя их пропускные способности. Для вершин-стоков известны величины потребностей в продукте —  $d_j$ . В дальнейшем для упрощения записей будем писать  $i \in A, i \in B, i \in C$  вместо  $p_i \in A, p_i \in B, p_i \in C$ .*

**Доказательство.** В данной работе мы рассматриваем одну из задач этого направления — определение числа  $n$ -местных функций  $k$ -значной логики, которые имеют эндоморфизм, отличный от константы и перестановки. Предлагается итеративная процедура, которая в случае функций  $k$ -значной логики состоит менее чем из  $k$  этапов. На каждом этапе происходит упрощение эндоморфизма — как по числу принимаемых значений, так и по внутренней структуре, — пока не образуется эндоморфизм, представляющий собой константу либо перестановку. В последнем случае считается, что подсчет числа  $n$ -местных функций, имеющих данный эндоморфизм, — сравнительно просто решаемая задача. На основе полученных результатов в трехзначной логике для всех эндоморфизмов приводятся явные формулы, дающие число  $n$ -местных функций с заданным эндоморфизмом.

**Определение 1.** Эндоморфизм, являющийся перестановкой на  $E_k$ , называется автоморфизмом. Множество всех функций из  $P_k$ , имеющих эндоморфизм  $g$ , обозначим через  $F(g)$ .

<sup>1</sup> Факультет ВМК МГУ, доц., к.ф.-м.н, e-mail: iivanov.msu.su

<sup>2</sup> Факультет ВМК МГУ, доц., к.ф.-м.н, e-mail: ppetrov.msu.su

\* Работа выполнена при моральной поддержке РФФИ, проект №12–34–567890.

**1.1. Дополнительные факты.** Одной из традиционных задач теории функций многозначной логики является задача о подсчете числа функций в различных множествах функций. При этом сами множества определяются, как правило, с использованием свойств алгебраического либо метрического характера. Часто в качестве такого свойства выступает группа или полугруппа некоторых преобразований. Наиболее известными здесь являются группы автоморфизмов и полугруппы эндоморфизмов. Для групп автоморфизмов соответствующие перечислительные задачи позволяет решать теория Пойа [1] (см. также [2]). Для произвольных полугрупп эндоморфизмов подобного инструмента пока не известно.

Как известно [3], любой позитивно замкнутый класс функций полностью определяется своей полугруппой эндоморфизмов, которая представляет собой полугруппу специального вида, содержащую единицу. Во второй части работы с использованием компьютера находятся все 192 полугруппы с единицей, которые определяют позитивно замкнутые классы в  $P_3$ . Поскольку определение полугрупп происходит посредством перечисления всех трехместных функций из  $P_3$ , мы получаем новый способ определения всех позитивно замкнутых классов из  $P_3$ , отличный от способа из работы [4]. Кроме того, находятся мощности множеств трехместных функций из всех указанных позитивно замкнутых классов.

Дадим необходимые определения. Пусть  $k \geq 3$ ,  $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$  и  $P_k$  — множество всех функций на  $E_k$  (множество функций  $k$ -значной логики). Посредством  $P_k^{(n)}$  будем обозначать множество всех  $n$ -местных функций из  $P_k$ . Если  $F$  — конечное множество функций, то посредством  $|F|$  обозначаем число элементов множества  $F$ . Произвольную функцию  $g$  из множества  $P_k^{(1)}$  будем записывать в виде вектора  $(g(0)g(1) \dots g(k-1))$ .

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  и  $g(x)$  — функции из  $P_k$ . Говорим, что функция  $g$  есть эндоморфизм функции  $f$ , если выполняется тождество

$$g(f(x_1, \dots, x_n)) = f(g(x_1), \dots, g(x_n)). \quad (1)$$

Эндоморфизм, являющийся перестановкой на  $E_k$ , называется автоморфизмом. Множество всех функций из  $P_k$ , имеющих эндоморфизм  $g$ , обозначим через  $F(g)$ .

Легко проверяется, что для любой функции  $g(x)$  множество  $F(g)$  содержит все селекторные функции и оно замкнуто относительно операции суперпозиции, т.е. является клоном. Более того,  $F(g)$  представляет собой позитивно замкнутый класс [3].

Если  $g(x)$  — константа  $a$ , то  $F(g)$  состоит из всех функций, сохраняющих  $a$ . Хорошо известно, что  $|F(g)^{(n)}| = k^{k^n-1}$ . Также легко определяются строение функций из  $F(g)$  и число функций в множестве  $F(g)^{(n)}$  для случая, когда  $g$  — перестановка. Именно множество  $E_k^n$  с помощью функции  $g$  разбивается на попарно не пересекающиеся подмножества —  $n$ -орбиты. Каждая  $n$ -орбита состоит из всех наборов, любые два из которых можно перевести друг в друга посредством подходящей степени перестановки  $g$ . Поэтому для полного задания функции  $f$  из  $F(g)^{(n)}$  (и подсчета таких функций) достаточно выбрать в каждой  $n$ -орбите по одному набору и определить функцию  $f$  на выбранных наборах.

В качестве примера рассмотрим два типа перестановок, которые играют важную роль в вопросах определения позитивно предполных классов.

Пусть сначала цикловое разложение перестановки  $g$  состоит из  $p$  циклов одной и той же длины  $l \geq 2$  (т.е.  $k = pl$ ). Тогда каждая  $n$ -орбита также состоит из  $l$  наборов. Поэтому число  $n$ -местных функций, имеющих автоморфизм  $g$ , равно  $k^{p^n l^{n-1}}$ . Отметим, что в случае простого числа  $l$  класс  $F(g)$  является позитивно предполным в  $P_k$  [3].

Пусть теперь цикловое разложение перестановки  $g$  состоит из  $p$  одноэлементных циклов и  $q$  циклов одной и той же длины  $l$ , где  $p \geq 1$  и  $l \geq 2$  (т.е.  $k = p + ql$ ). В этом случае число  $n$ -орбит длины  $l$  равно  $(k^n - p^n)/l$ , а число одноэлементных  $n$ -орбит равно  $p^n$ . Поэтому число  $n$ -местных

функций, имеющих автоморфизм  $g$ , равно

$$p^{p^n} \cdot k^{\frac{k^n - p^n}{l}}.$$

И здесь следует отметить, что при  $p \geq 2$  и простом  $l$  класс  $F(g)$  является позитивно предполным в  $P_k$  [3].

Предположим, что функция  $g$  отлична от константы и перестановки. Опишем итеративную процедуру, которая позволяет в принципе подсчитать число функций в множествах  $F(g)^{(n)}$ .

Пусть область значений функции  $g$  есть  $D = \{d_1, \dots, d_m\}$  и  $D_i = g^{-1}(d_i)$  при  $1 \leq i \leq m$ . Из тождества (1) следует, что функция  $f$  сохраняет множество  $D$ . Поэтому ограничение  $f_1$  функции  $f$  на множество  $D$  является функцией на  $D$ . Обозначим через  $g_1$  ограничение функции  $g$  на множество  $D$ . Из (1) следует также, что  $g_1$  есть эндоморфизм функции  $f_1$ .

Предположим, что нам известна функция  $f_1$ . Покажем, как и сколькими способами можно определить функцию  $f$  на множестве  $E_k^n \setminus D^n$ .

Рассмотрим произвольное множество  $D_{i_1} \times \dots \times D_{i_n}$ , где  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$ . Функция

$$f(g(x_1), \dots, g(x_n))$$

принимает на этом множестве одно и то же значение. Обозначим его  $d_j$ . Тогда, согласно (1), функция  $f$  на множестве  $D_{i_1} \times \dots \times D_{i_n}$  обязана принимать значения только из множества  $D_j = g^{-1}(d_j)$ . Учитывая, что на множестве  $D^n$  значения функции  $f$  известны, приходим к выводу, что функцию  $f$  на множестве  $(D_{i_1} \times \dots \times D_{i_n}) \setminus D^n$  можно определить произвольно, лишь бы ее значения принадлежали множеству  $D_j$ .

Приведенные соображения позволяют (при известной функции  $f_1$ ) выявить структуру доопределений функции  $f_1$  на все множество  $E_k^n$ , а также найти число таких доопределений.

Если функция  $g_1$  является константой либо перестановкой, то, как указано выше, можно найти вид всех функций  $f_1$  и определить их число. В противном случае к функциям  $f_1$  и  $g_1$  следует применить те же рассуждения, что и для функций  $f, g$ . Однако функции  $f_2, g_2$ , которые появятся на этом этапе, будут представлять собой уже функции  $m'$ -значной логики, где  $m' < m$ . Этот итеративный процесс состоит из  $s < k$  этапов и завершается функцией  $g_s$ , которая является либо константой, либо перестановкой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Donoho and I. M. Johnstone, "Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage," *Biometrika*, **81**, No. 3, 425–455 (1994).
2. D. Donoho and I. M. Johnstone, "Minimax estimation via wavelet shrinkage," *Ann. Stat.*, **26**, No. 3, 879–921 (1998).
3. M. Jansen, *Noise Reduction by Wavelet Thresholding*, Springer, New York (2001).
4. J. Sadasiva, S. Mukherjee, and C.S. Seelamantula, "An optimum shrinkage estimator based on minimum-probability-of-error criterion and application to signal denoising," in: *2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Piscataway, New Jersey (2014), pp. 4249–4253.
5. A. A. Kudryavtsev and O. V. Shestakov, "Asymptotic behavior of the threshold minimizing the average probability of error in calculation of wavelet coefficients," *Dokl. Math.*, **93**, No. 3, 295–299 (2016).
6. A. A. Kudryavtsev and O. V. Shestakov, "Asymptotically optimal wavelet thresholding in the models with non-Gaussian noise distributions," *Dokl. Math.*, **94**, No. 3, 615–619 (2016).
7. S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, New York (1999).